

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

Nivel Superior

Prueba 2

31 de octubre de 2023

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

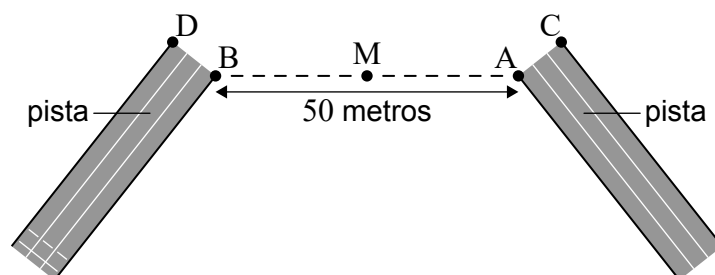
Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 15]

Madhu está diseñando una pista de trotar para el campus de su colegio. La siguiente figura muestra un fragmento incompleto de la pista.

Madhu quiere diseñar la pista de modo tal que el borde interior sea una curva suave que vaya del punto A al punto B y el otro borde sea una curva suave que vaya del punto C al punto D. La distancia que hay entre los puntos A y B es 50 metros.

la figura no está dibujada a escala



Para crear una curva suave, Madhu camina primero hasta M, que es el punto medio de [AB].

(a) Escriba la longitud de [BM].

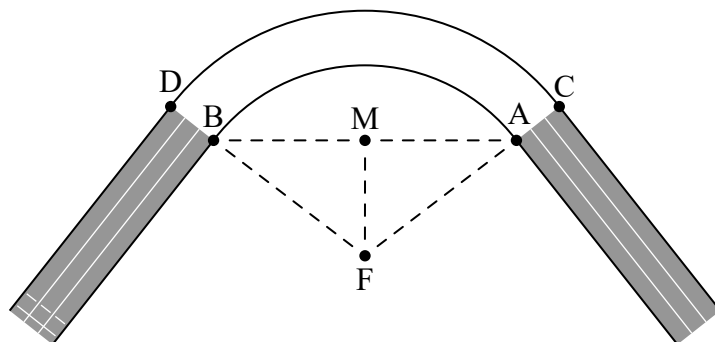
[1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

A continuación Madhu camina 20 metros en dirección perpendicular a $[AB]$ para ir desde el punto M hasta el punto F . El punto F es el centro de una circunferencia cuyo arco será la curva suave que une los puntos A y B de la pista, tal y como se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



- (b) (i) Halle la longitud de $[BF]$.
 (ii) Halle $\widehat{BFM}$. [4]

- (c) A partir de lo anterior, halle la longitud del arco AB . [3]

El borde exterior de la pista, entre C y D , también es un arco de circunferencia con centro en F y la anchura de la pista es igual a 2 metros.

- (d) Calcule el área del fragmento curvo de la pista ($ABDC$). [4]

La base de la pista será de cemento y tendrá 12 cm de profundidad.

- (e) Calcule el volumen de cemento que se necesita para hacer el fragmento curvo de la pista. [3]

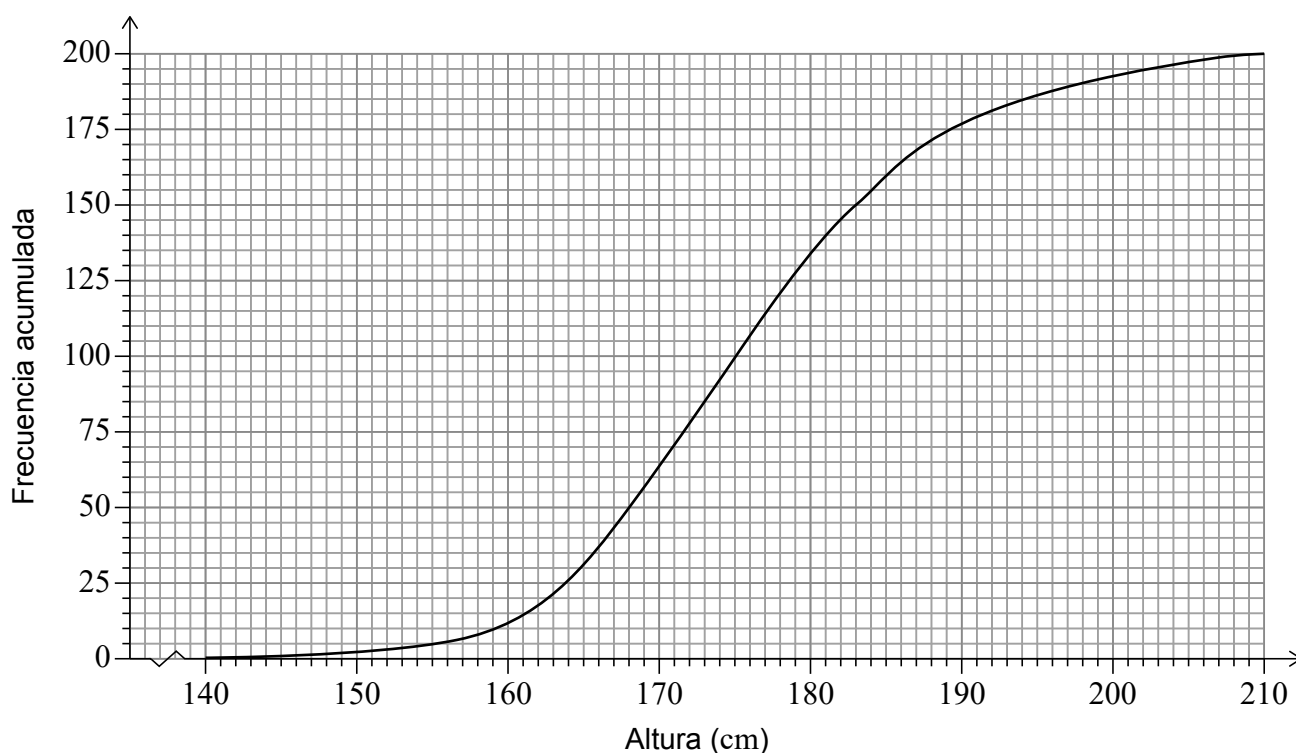
2. [Puntuación máxima: 18]

Las alturas (h) de 200 estudiantes universitarios se muestran en la siguiente tabla.

Altura (cm)	Frecuencia
$140 \leq h < 160$	11
$160 \leq h < 170$	51
$170 \leq h < 180$	68
$180 \leq h < 190$	47
$190 \leq h < 210$	23

- (a) (i) Escriba el valor central del intervalo de $140 \leq h < 160$.
- (ii) Calcule una estimación de la media de las alturas de los 200 estudiantes. [3]

Esta tabla se utiliza para crear el siguiente gráfico de frecuencias acumuladas.



- (b) Utilice la curva de frecuencias acumuladas para estimar el rango intercuartil. [2]

Laszlo es uno de los estudiantes de ese conjunto de datos y mide 204 cm de altura.

- (c) Utilice la respuesta que halló en el apartado (b) para estimar si la altura de Laszlo es, para estos datos, un valor atípico. Justifique su respuesta. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Se cree que las alturas de los estudiantes universitarios siguen una distribución normal con una media de 176 cm y desviación típica igual a 13,5 cm.

Se decide realizar para estos datos una prueba χ^2 de determinación de la bondad del ajuste para saber si es plausible que esta muestra de 200 estudiantes se haya obtenido de una distribución subyacente $N(176; 13,5^2)$.

- (d) Escriba para esta prueba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. [2]

Como parte de esta prueba se crea la siguiente tabla.

Altura del estudiante (cm)	Frecuencia observada	Frecuencia esperada
$h < 160$	11	23,6
$160 \leq h < 170$	51	42,1
$170 \leq h < 180$	68	a
$180 \leq h < 190$	47	46,7
$190 \leq h$	23	b

- (e) (i) Halle el valor de a y el valor de b .
- (ii) A partir de lo anterior, realice una prueba a un nivel de significación del 5 % e indique claramente a qué conclusión llega, en el contexto de la pregunta. [8]

3. [Puntuación máxima: 16]

Tiffany quiere comprar una casa que tiene un precio de 285 000 dólares estadounidenses (USD). Ella va a un banco para pedir un préstamo y comprar la casa. Para poder optar al préstamo, Tiffany tiene que realizar un pago inicial igual al 15 % del precio de la casa.

El banco le ofrece un préstamo a 30 años por la cantidad restante, con un tipo de interés nominal del 4 % anual, compuesto mensualmente. Tiffany pagará el préstamo en cuotas fijas al final de cada mes.

- (a) (i) Halle el valor del préstamo que le conceden, una vez realizado el pago de la inicial. Dé una respuesta exacta.
- (ii) Calcule la cuota mensual que paga Tiffany por este préstamo, redondeando a dos cifras decimales. [5]
- (b) Utilizando la respuesta del apartado (a)(ii), calcule la cantidad total que pagará Tiffany durante la vida útil del préstamo, redondeando al número entero de USD más próximo. **No** incluya en sus cálculos el pago de la inicial realizado. [2]

Tiffany quiere devolver el préstamo en menos tiempo y por ello aumenta la cuota hasta los 1300 USD al mes.

- (c) Halle el número total de cuotas mensuales que tendrá que pagar para devolver todo el préstamo. [2]

Esta estrategia hará que el pago final de Tiffany sea inferior a los 1300 USD.

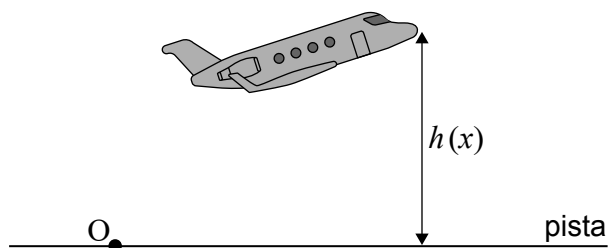
- (d) Determine el importe de la última cuota que pagará Tiffany, redondeando a dos cifras decimales. [4]
- (e) A partir de lo anterior, determine la cantidad total que se ahorrará Tiffany (redondeando al número entero de USD más próximo) al haber aumentado las cuotas mensuales. [3]

4. [Puntuación máxima: 12]

Un avión despegue de una pista horizontal. Sea O el punto donde el avión comienza a abandonar la pista y sea x la distancia horizontal (en km) que hay entre O y el avión. La función h modeliza la altura vertical (en km) que separa la nariz del avión de la pista horizontal; y se define por

$$h(x) = \frac{10}{1 + 150e^{-0,07x}} - 0,06, \quad x \geq 0.$$

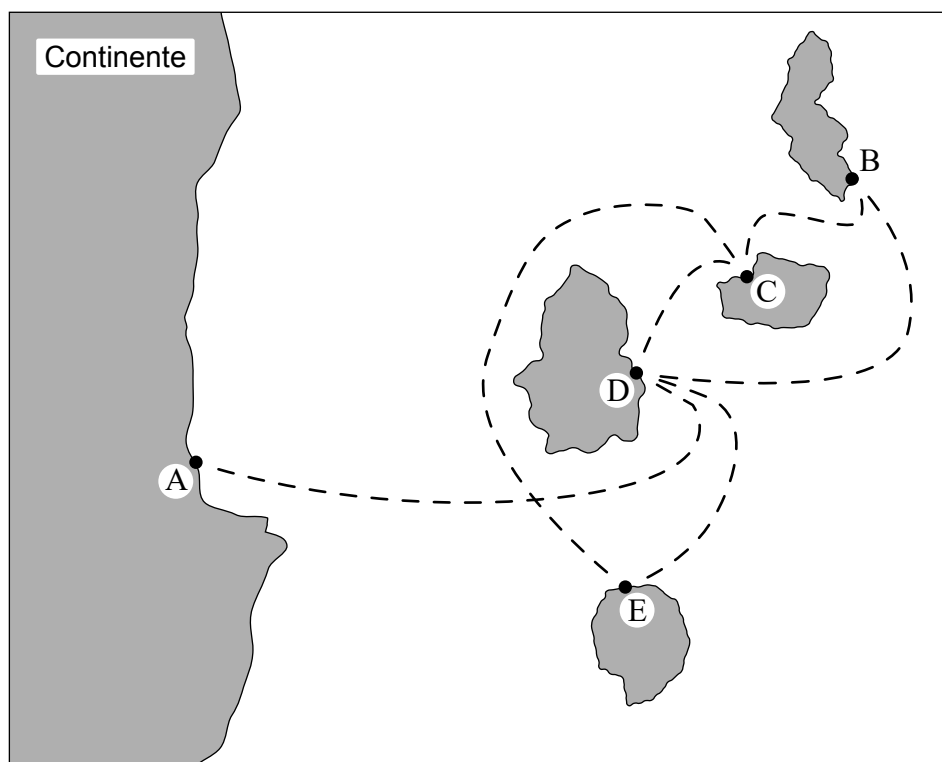
la figura no está dibujada a escala



- (a) (i) Halle $h(0)$.
(ii) Interprete este valor en el contexto de la pregunta. [2]
 - (b) (i) Halle la asíntota horizontal del gráfico de $y = h(x)$.
(ii) Interprete este valor en el contexto de la pregunta. [2]
 - (c) Halle $h'(x)$ en función de x . [4]
- Una norma de seguridad recomienda que $h'(x)$ nunca sea mayor que 0,2.
- (d) Sabiendo que este avión vuela a una distancia horizontal mínima de 200 km del punto O , determine si el avión cumple (o no) esta norma de seguridad. [4]

5. [Puntuación máxima: 18]

En la siguiente figura se muestra el mapa de un grupo de cuatro islas y del continente más próximo. Para viajar desde el continente y entre las islas hay que coger un barco. Las rutas regulares de barco entre los puertos A, B, C, D y E se muestran en el mapa como líneas de puntos.



Sea G , el grafo no orientado, que representa las rutas de barco que hay entre los puertos A, B, C, D y E.

(a) Dibuje con precisión el grafo G . [1]

(b) El grafo G se puede representar mediante la matriz de adyacencia P , donde las filas y las columnas representan los diversos puertos en orden alfabético.

(i) Sabiendo que $P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & a & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & a & 6 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ halle el valor de a .

(ii) A partir de lo anterior, escriba el número de maneras distintas en las que alguien podría empezar en el puerto B y terminar en el puerto C utilizando tres trayectos de estas rutas en barco. [3]

(c) Halle en G un posible sendero euleriano que empiece en el puerto A. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 5: continuación)

En la siguiente tabla aparece el precio por trayecto de las distintas rutas de barco; todos los precios están dados en USD. El precio de un trayecto entre dos puertos dados es el mismo en ambas direcciones.

	A	B	C	D	E
A				10	
B			20	25	
C		20		50	45
D	10	25	50		30
E			45	30	

Sofia quiere hacer un viaje —empezando y acabando en el puerto A— en la que utilice cada ruta de barco al menos una vez.

- (d) Halle el precio mínimo del viaje de Sofia. [3]

La compañía naviera decide abrir una ruta de barco adicional para que se pueda viajar utilizando cada ruta de barco **exactamente** una vez y empezando y terminando en el mismo puerto.

- (e) (i) Identifique entre qué dos puertos debe añadirse la ruta adicional en barco.
(ii) Determine el precio de esa ruta adicional del barco de modo que el precio total del viaje sea el mismo que su respuesta en el apartado (d). [2]

La compañía naviera tiene previsto redefinir qué puertos están conectados mediante rutas de barco. El objetivo es tener un único viaje de barco que visite todas las islas y minimice la distancia total recorrida, empezando y acabando en el continente (A).

La siguiente tabla muestra las distancias (en kilómetros) que hay entre los puertos A, B, C, D y E.

	A	B	C	D	E
A		80	90	50	60
B	80		30	70	120
C	90	30		45	100
D	50	70	45		55
E	60	120	100	55	

- (f) (i) Utilice el algoritmo del vecino más cercano para hallar un límite superior para la distancia total mínima.
(ii) Utilice el algoritmo del vértice borrado en el puerto A para hallar un límite inferior para la distancia total mínima. [7]

Véase al dorso

6. [Puntuación máxima: 14]

François es un diseñador de videojuegos. Los videojuegos que diseña tienen lugar en dos dimensiones, respecto a un origen O . En uno de sus juegos, un objeto se desplaza a lo largo de una recta L_1 cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Escriba L_1 en la forma $x = x_0 + \lambda l$ e $y = y_0 + \lambda m$, donde $l, m \in \mathbb{Z}$. [1]

François utiliza la matriz $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ para transformar L_1 en una recta nueva L_2 . El objeto se desplazará a lo largo de L_2 .

- (b) Halle la ecuación vectorial de L_2 . [4]

François sabe que la transformación que representa la matriz $\mathbf{T}$ está compuesta por las siguientes tres transformaciones separadas (en el orden que se dan):

- Una rotación de $\frac{\pi}{4}$, en sentido contrario a las agujas del reloj, alrededor del origen O
- Una homotecia de razón de $5\sqrt{2}$, y centro en O
- Una simetría respecto a la recta $y = mx$, donde $m = \tan \alpha$, $0 \leq \alpha < \pi$

- (c) Escriba la matriz que representa

(i) la rotación.

(ii) la homotecia. [2]

- (d) La matriz $\mathbf{R}$ representa la simetría. Escriba $\mathbf{R}$ en función de α . [1]

- (e) Sabiendo que $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{X}$,

(i) utilice las respuestas que dio en el apartado (c) para hallar la matriz $\mathbf{X}$.

(ii) a partir de lo anterior, halle el valor de α . [6]

7. [Puntuación máxima: 17]

La ciudad de Melba tiene una población de cuatro millones de habitantes adultos. Se supone que los pesos de los adultos que viven en Melba pueden modelizarse mediante una distribución normal con una media de 72 kg y desviación típica igual a 10 kg.

- (a) Si se elige al azar y de manera independiente a 10 adultos de Melba, halle la probabilidad de que más de 3 de ellos tengan un peso mayor que 85 kg. [4]

Laetitia es la directora de una agencia de viajes de Melba. El ascensor que lleva a su oficina tiene una capacidad máxima de 8 personas.

- (b) Escriba una distribución de probabilidad que modelice el peso total de los 8 habitantes adultos de Melba elegidos al azar y de manera independiente. [3]

El peso total de 8 adultos supera w en menos del 1 % de todas las ocasiones en que los 8 adultos entran en el ascensor.

- (c) Halle el valor de w . [2]

Un periódico afirma que el 42 % de los adultos de Melba que se van de vacaciones optan por irse al extranjero. Laetitia cree que ese número es una sobreestimación de la cifra real. El mes pasado Laetitia constató que 67 de sus clientes eligieron unas vacaciones en el extranjero y 133 eligieron unas vacaciones que no eran en el extranjero.

- (d) Laetitia decide realizar una prueba utilizando la distribución binomial sobre sus datos para la proporción de población, p , que se va de vacaciones al extranjero.

- (i) Indique **dos** suposiciones que tiene que hacer Laetitia para poder realizar esta prueba.
- (ii) Escriba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para la prueba de Laetitia, dándolas en función de p .
- (iii) Utilizando los datos procedentes de la muestra de Laetitia, realice una prueba a un nivel de significación del 5 % para determinar si la creencia de Laetitia es razonable. [8]
